

Introducción a la teoría cuántica de campos

Vamos a empezar nuestro curso de teoría cuántica de campos. El curso será largo así que habrá que ser pacientes. Y será largo por la siguiente razón: Muchos de los amigos de Cuentos Cuánticos estaban interesados en este tema y no sabemos si tienen dominio de la mecánica clásica o del tratamiento clásico de los campos. Así que vamos a introducirlo todo sin prisa y dando muchos detalles. Nos parecía un poco arriesgado invocar cosas como el teorema Nöther sin estar seguros de que todos los interesados en este curso han tenido contacto con él.

Esperamos que os sea de utilidad y esperamos algún tipo de comentario y que al menos un valiente siga el curso e intente los problemas (que son simples y serán resueltos paso por paso).

Los libros de referencia que estamos empleando para las notas de este curso son:

[Classical Dynamics a contemporary approach](#) de José y Saletan

[Quantum Field Theory](#) de Lewis Ryder

[An introduction to Quantum Field Theory](#) de Peskin y Schroeder

Breve introducción a la relatividad especial

0.1.- [Revisión de relatividad especial 1](#)

0.2.- [Revisión de relatividad especial 2](#)

Parte Clásica

1.1.- [Mecánica Lagrangiana](#)

1.1.1.- [Ejercicio](#)

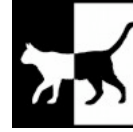
1.2.- [La acción 1](#)

1.3.- [La acción 2](#)

1.3.1.- [Ejercicio](#)

1.4.- [Teoría Clásica de Campos](#)

1.5.- [Simetrías y Cantidades Conservadas: El teorema Nöther](#)



1.5.1- [Teorema Nöther: Corrientes y Cargas conservadas](#)

Parte Cuántica

Campo escalar

2.1.- [La ecuación de Klein-Gordon](#)

2.2.- [El problema de Klein-Gordon](#)

2.3.- [Probabilidades Negativas](#)

Breve introducción a la relatividad especial

Revisión de Relatividad Especial 1

Esta entrada está orientada para aquellos que necesitan una presentación breve de los conceptos básicos de la relatividad especial. Por lo tanto, esto es útil para los que estén siguiendo los cursos técnicos de [teoría cuántica de campos](#) y [teoría de cuerdas](#).

Relatividad especial

La relatividad especial se basa en un postulado (en esto no hay acuerdo entre los físicos, la mayor parte de las presentaciones de la relatividad especial dicen que hay dos postulados, podemos discutirlo):

La física es igual para todo observador inercial.

Este postulado se puede reformular de dos maneras:

La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores inerciales.

El espaciotiempo tiene cuatro dimensiones y posee la métrica de Minkowski.

Bajo nuestro punto de vista todos estos enunciados son equivalentes, pero sabemos que no es la posición más común.

En relatividad especial las coordenadas espaciales (x,y,z) y el tiempo están en pie de igualdad. Espacio y tiempo no son conceptos absolutos como en la física Newtoniana.

Sucesos o Eventos



Un suceso (evento) es un proceso físico que se produce en un punto del espacio en un tiempo determinado (para algún observador). Esto se representa en un punto en el espaciotiempo que viene descrito por cuatro componentes: (ct, x, y, z) .

Denotaremos un cuádrivector de este tipo mediante la notación x^μ :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

A esto lo llamaremos 4-vector. Y se podrá escribir como $x^\mu = (x^0, x^i)$ donde i toma los valores 1,2,3 y se corresponde con las componentes espaciales.

Intervalo relativista

Tenemos un sistema de referencia inercial S que mide la distancia espaciotemporal de dos sucesos representados por x^μ y $x^\mu + dx^\mu$.

Definiremos el intervalo relativista o simplemente intervalor como:

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

(Para calcular esto actuamos de la manera usual, buscamos la diferencia entre los puntos y luego sumamos los cuadrados de las diferencias de cada coordenada)

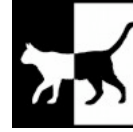
Los signos menos están puestos de tal forma que luego nos permita la clasificación de los distintos tipos de intervalo empleada usualmente en teoría de cuerdas y teoría cuántica de campos. Lo importante es que la componente temporal tiene signo opuesto a las componentes espaciales en esta expresión.

Si tuvieramos otro sistema inercial S' midiendo el intervalo de los mismos sucesos en su sistema les asignaría las coordenadas x'^μ y $x'^\mu + dx'^\mu$ y el intervalo sería:

$$-ds'^2 = -(dx'^0)^2 + (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2$$

Se exige que el **intervalo** sea una **cantidad invariante**. Es decir, cada observador asignará un intervalo de tiempo y una distancia espacial diferente entre sucesos pero el intervalo relativista valdrá lo mismo para todos los observadores inerciales:

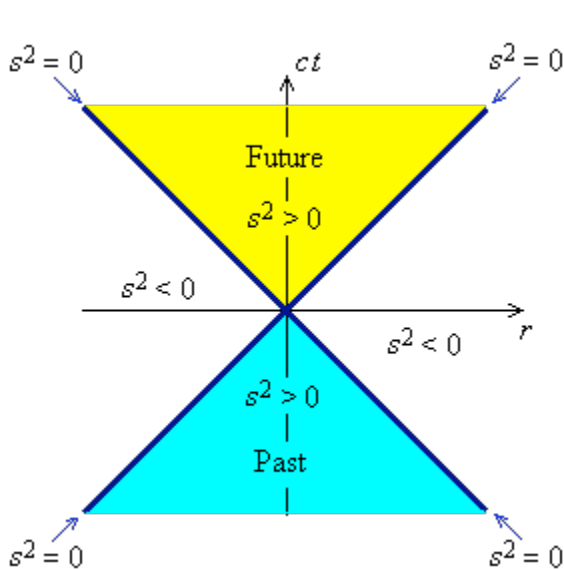
$$ds^2 = ds'^2$$



Esta es la primera señal de lo que se conoce como objeto **Invariante Lorentz** que explicaremos con más detalle en lo siguiente. Notemos que el intervalo ds^2 no tiene índices, es decir, no es un 4-vector ni generalizaciones del mismo, esto siempre es indicativo de la invariancia Lorentz de un objeto.

Clasificación del intervalo

Dado que tenemos una diferencia de signo entre la parte temporal y espacial en el intervalo está claro que el intervalo podrá ser negativo, nulo o positivo. Le vamos a poner nombre a cada caso:



1.- $ds^2 > 0$ lo que implica $dx^0 > \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}$. A este tipo de intervalo lo llamaremos **tipo tiempo** o **intervalo temporal**. Dos sucesos unidos por una línea de mundo (trayectoria en el espacio tiempo) de una partícula moviéndose a velocidades menores que la de la luz tienen intervalos de tipo tiempo. Estas líneas de mundo siempre están contenidas dentro del cono de luz asociado al observador.

2.- $ds^2 = 0$ A esto lo llamamos intervalo **tipo nulo** o **intervalo nulo**. Este tipo de intervalo identifica a las partículas que se mueven a la velocidad de la luz y que conforman el cono de luz.

3.- $ds^2 < 0$ este intervalo se llama de **tipo espacial** o **intervalo espacial**. Si dos sucesos están separados por un intervalo espacial significa que están causalmente desconectados, no hay forma de enviar información entre ellos porque para eso la velocidad de las partículas conectando estos sucesos deberían de superar la velocidad de la luz. Aquí estamos considerando transmisión de partículas con masa en reposo real positiva o nula.

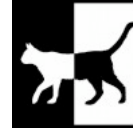
Sólo para sucesos separados por un intervalo temporal se puede escribir: $ds = \sqrt{ds^2}$.

Índices arriba, índices abajo

Uno puede definir los 4-vectores con índices arriba (como hemos hecho hasta ahora) o con los índices abajo. No entraremos por ahora en las sutilidades de esto que las hay y son muy interesantes desde el punto de vista matemático. Por ahora nos interesa mostrar que dado un objeto con índices arriba se puede convertir en un objeto con índices abajo y viceversa con la participación de la métrica. Todo esto será claro en lo que sigue.



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

Definamos el objeto $dx_\mu = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3)$ donde tendremos la siguiente relación con las componentes del objeto con los índices arriba:

$$dx_0 = -dx^0 \text{ y } dx_i = dx^i$$

Por lo tanto,

$$dx_\mu = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) = (-dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

Antes hemos visto como expresar $-ds^2$:

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Esto se puede reescribir como:

$$-ds^2 = dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3$$

Podemos abreviar esto con la siguiente notación:

$$-ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx_\mu dx^\mu = dx_\mu dx^\mu$$

En la última parte de las igualdades mostradas hemos empleado el **convenio de suma de Einstein**. Este convenio nos dice que cuando tenemos un objeto con dos índices iguales, uno arriba y otro abajo, hemos de sumar cada producto de cada componente. A estos índices repetidos arriba y abajo e iguales lo llamamos índices mudos y siempre podemos renombrarlos:

$$dx_\mu dx^\mu = dx_\nu dx^\nu$$

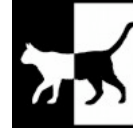
La métrica de Minkowski

Hemos de reconocer inmediatamente que la expresión $dx_\mu dx^\mu$ (con el convenio de suma de Einstein) da como resultado la suma de la multiplicación de cada componente (en caso de ser el mismo 4-vector, la suma de los cuadrados de cada componente). Esto es esencialmente un producto escalar. Cuando es posible hacer esto tenemos entre manos un espacio que dispone de una métrica. Para repasar esto visitar la [entrada sobre la métrica](#).

El intervalo se puede expresar como:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la conocida como **métrica de Minkowski**. (Aquí tenemos dos índices iguales y repetidos, así que hemos de emplear el convenio de Einstein).

Este objeto es el que nos permite medir distancias, ángulos, áreas, etc, en el espaciotiempo.

Propiedades de la métrica:

1.- La propiedad fundamental de la métrica es que es un objeto simétrico, es decir, si intercambiamos sus índices el objeto permanece igual:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$$

2.- Comparemos con el resultado del intervalo:

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{11} dx^1 dx^1 + \eta_{22} dx^2 dx^2 + \eta_{33} dx^3 dx^3$$

Eso quiere decir que los elementos diagonales (los dos índices iguales) son: -1 para la componente (00), y 1 para las componentes (11), (22), (33).

En forma matricial la métrica se puede expresar:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- La métrica es el objeto que nos ayuda a subir y bajar índices. Es fácil ver que si multiplicamos matricialmente la métrica por un vector (en forma de columna) el resultado es lo que hemos definido como el “vector” con índice abajo. En general tendremos que:

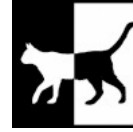
$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$$

Y en nuestro caso $dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu$.

Así el producto escalar entre dos 4-vectores \dot{a} \dot{b} se puede escribir como:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

Con lo que en nuestro caso de interés podemos escribir $-ds^2 = dx dx$.

4.- Por último la métrica es invertible (es fácil comprobar que su determinante es distinto de cero. Así definiremos la métrica inversa (con los índices arriba):

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De forma que es fácil comprobar que:

$$\eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_\nu^\mu$$

en este caso la delta es la delta de Kronecker que toma un valor igual a 1 cuando ambos índices toman el mismo valor, y un valor cero en caso contrario como es fácilmente deducible de la expresión anterior.

Dejamos aquí, por el momento, este breve repaso al formalismo de la relatividad especial. En la siguiente entrada veremos como se deducen las transformaciones de Lorentz, como la métrica de Minkowski es un invariante Lorentz, e introduciremos los conceptos de energía y momento relativista.

Revisión de relatividad especial 2

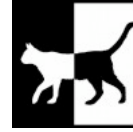
Vamos a seguir con nuestra discusión sobre las bases de la relatividad especial. En esta ocasión vamos a introducir las transformaciones de Lorentz y dejaremos el tratamiento relativista de energía y momento así como lo que entendemos por tiempo propio para una tercera parte.

Sabemos que este repaso de relatividad especial es muy breve y por eso iniciaremos un minicurso en formato pildorazos donde expondremos este tema con más detalle.

Transformaciones de Lorentz



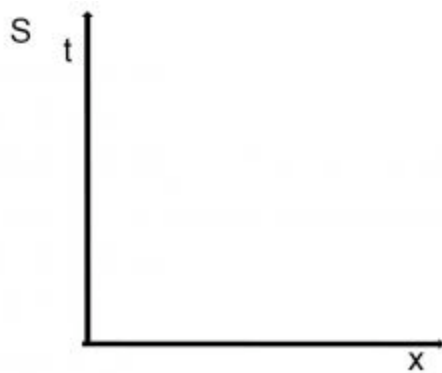
Cuentos Cuánticos



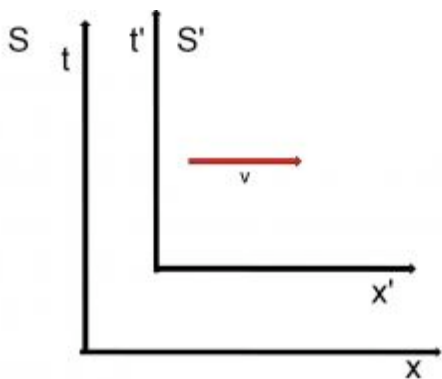
Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

Estas son las herramientas que nos permiten comparar las medidas y coordenadas efectuadas entre distintos sistemas de referencia inerciales. En esta entrada nos vamos a restringir al caso más simple aunque no supone ninguna pérdida de generalidad.

1.- Tenemos un sistema de referencia S en el que estamos nosotros, por lo tanto está en reposo relativo respecto a nosotros mismos.



2.- Ahora vemos otro sistema de referencia S' que se mueve a lo largo del semieje positivo en la dirección x del sistema S (el nuestro) con velocidad constante v .



3.- Todos los ejes de coordenadas son paralelos entre ambos sistemas y cuando los orígenes coincidieron se sincronizaron los relojes $t = t' = 0$.

Se dice entonces que al sistema S' se le asigna un parámetro de velocidad $\beta = v/c$ (desde el sistema S, notemos que si le preguntamos a S' lo vería todo igual pero con nuestra velocidad en sentido contrario).

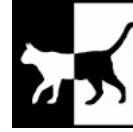
La transformación de Lorentz que conecta a estos dos sistemas es:

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$y' = y$$

$$z' = z$$

El factor γ se denomina factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si empleamos la notación con índices $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1)$$

$$x'^2 = x^2$$

$$x'^3 = x^3$$

Por lo que hemos visto, el intervalo ha de ser invariante relativista:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2$$

Invariancia Lorentz del intervalo relativista

Siendo un poco más formales podemos decir:

Las transformaciones de Lorentz son las transformaciones lineales entre las coordenadas que mantienen el intervalo relativista invariante.

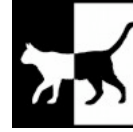
Introduzcamos un poco de notación:

Las transformaciones entre coordenadas entre los sistemas S y S' se pueden escribir de este modo:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

En forma matricial:

$$\Lambda = \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ds'^2 :

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}$$

Ahora le preguntamos a S como ve este cálculo:

S por su parte calcularía el intervalo entre dos sucesos como:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}$$

Comparando ambas expresiones, y dado que el intervalo es invariante:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

Lo que nos indica es que la métrica es un elemento invariante, todo observador inercial ve la misma métrica en el espaciotiempo. Además vemos otra característica aquí, uno ha de introducir una transformación de Lorentz por cada índice que tenga un objeto. Pondremos un factor Λ para un vector x^{μ} y para la métrica $\eta_{\mu\nu}$ necesitamos dos factores Λ .

Esta expresión se puede escribir como:

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\beta}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

Y en notación matricial:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

donde Λ^T indica que hemos usado la matriz traspuesta de la transformación. Recordemos que la traspuesta de una matriz es cambiar filas por columnas.

Y por último calculemos el determinante de una matriz de transformación Lorentz usando la expresión anterior.

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta)$$

El determinante de un producto de matrices es el producto de determinantes:

$$\det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta)$$

Simplificando el determinante de la métrica (que sabemos que da -1):

$$\det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = 1$$

Dado que el determinante de una matriz y de su traspuesta es el mismo:

$$\det(\Lambda)^2 = 1$$

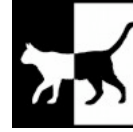
Por lo tanto: $\det \Lambda = \pm 1$

Dado que el determinante de una matriz de transformación Lorentz nunca es nulo, las matrices son invertibles (como tiene que ser porque eso significa que S tiene que ver a S' y poder calcular sus medidas y viceversa, S' puede convertir las medidas y/o coordenadas de S en las suyas propias, implicando eso transformaciones de Lorentz inversas).

Parte Clásica

Mecánica Lagrangiana

Empezamos con nuestro paseo hacia la teoría cuántica de campos. Este trabajo lo dividiremos en dos partes, la parte clásica y la parte cuántica. En la primera parte revisaremos como se trabaja en física clásica con un campo, introduciendo elementos esenciales como el/la Lagrangiano/a y el Hamiltoniano (ya hemos tratado a este objeto en el blog). Veremos qué es la acción y discutiremos la importancia de las simetrías. Posteriormente iremos a la parte cuántica del asunto.



En esta primera entrada daremos unas breves notas sobre mecánica Lagrangiana.

La Lagrangiana

La Lagrangiana es un objeto que contiene toda la dinámica de un sistema mecánico. Es decir, conocida la Lagrangiana podemos obtener las ecuaciones del movimiento del sistema. Para encontrar estas últimas hacemos uso de las conocidas como **ecuaciones de Euler-Lagrange**. En esta primera toma de contacto simplemente introduciremos a mano dichas ecuaciones y posteriormente las derivaremos.

El objetivo esencial de esta entrada es mostrar que la mecánica Lagrangiana contiene exactamente la misma información que la mecánica Newtoniana.

Una partícula en una dimensión

Para hacer la discusión más sencilla inicialmente nos concentraremos en estudiar cómo evoluciona una partícula en una única dimensión con una energía cinética dada por T y sometida a un potencial $V(x)$.

La Lagrangiana formalmente (y en los casos que nos vamos a ocupar) es la siguiente combinación:

$$L=T-V$$

Por lo tanto la Lagrangiana en nuestro caso será dada por:

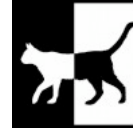
- Energía cinética: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, donde m es la masa de la partícula y $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ es la velocidad de la misma.

- Energía potencial: En este caso supondremos que el potencial únicamente depende de la posición de la partícula, $V(x)$, pero no de su velocidad \dot{x} o del tiempo, t .

La Lagrangiana será:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

Es importante recordar que en este contexto, posiciones x y velocidades \dot{x} son tratadas como variables independientes, es decir, la Lagrangiana depende de dos variables (en este caso unidimensional), $L = L(x, \dot{x})$.



Las ecuaciones del movimiento: Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para obtener las ecuaciones del movimiento de una Lagrangiana dada emplearemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Notemos que implican derivadas parciales respecto de posiciones y velocidades ya que L es función de ambas variables que se consideran independientes.

Entonces, en nuestro caso:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

Vamos a derivar las ecuaciones del movimiento:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

1.- Calculamos $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$:

Entendiendo que la masa es independiente del tiempo.

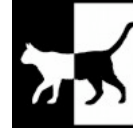
2.- Calculamos la derivada temporal de este resultado anterior:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

3.- Ahora calculamos el otro término:

4.- Lo juntamos en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{que queda,} \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$



Es fácil reconocer que acabamos de encontrar la ley de Newton para fuerzas conservativas (aquellas que son el gradiente de un potencial cambiado de signo). Así que la mecánica escrita en términos Lagrangianos es totalmente equivalente a la mecánica de Newton.

Las ventajas sobre esta última son que se basa en el concepto de energía del sistema que es una magnitud escalar, no hay que colocar complicados diagramas de vectores y la obtención de las ecuaciones del movimiento es directa a través de la ecuación de Euler-Lagrange. Además veremos próximamente más características de la Lagrangiana que la hacen un concepto especialmente poderoso para el estudio de la dinámica de los sistemas físicos.

Ejercicio mecánica lagrangiana

Ejercicio de la entrada de [mecánica Lagrangiana](#):

Consideremos una partícula de masa m sometida a una fuerza de Hooke $F=-kx$. Encontrar la ecuación del movimiento empleando el método Lagrangiano.

Ayuda: El movimiento es en una única dimensión. Hemos dado la fuerza, recordar que en este caso el potencial se recupera por integración directa.

Solución:

Vamos a construir la Lagrangiana. Primero construimos la energía cinética:

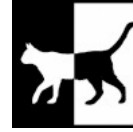
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Ahora calculamos el potencial, para ello hacemos una integral:

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

El potencial diferencial será:

$$dV = -F dx$$



Integrando (con los límites de integración entre 0 y x):

$$V = \int dV = - \int F dx = - \int -kx dx = k \int x dx = k \frac{x^2}{2}$$

Así pues:

$$V = \frac{1}{2} kx^2$$

Por lo tanto la Lagrangiana será: $L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$.

Ahora aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Para lo que sigue hemos de recordar que las variables x y \dot{x} se tratan como independientes.

1.- Calculamos $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$

2.- Calculamos la derivada temporal de esta última expresión y obtenemos $m \ddot{x}$.

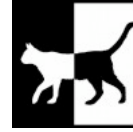
3.- Calculamos $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$.

Uniendolo todo: $m \ddot{x} = -kx$. Si ahora modificamos un poco la expresión:

$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ donde $\omega^2 = k/m$ es la frecuencia del oscilador. La anterior ecuación de movimiento es la que identifica un movimiento armónico simple.

La acción 1

En la [entrada sobre el Lagrangiano](#) introdujimos a mano las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico.



En esta entrada vamos a introducir el concepto de acción vamos a comprobar que hay un método por el cual sacamos las mismas ecuaciones del movimiento que aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange directamente al Lagrangiano. Y en una entrada posterior mostraremos que dichas ecuaciones emergen directamente del principio extremal de la acción (que se enuncia en esta entrada)

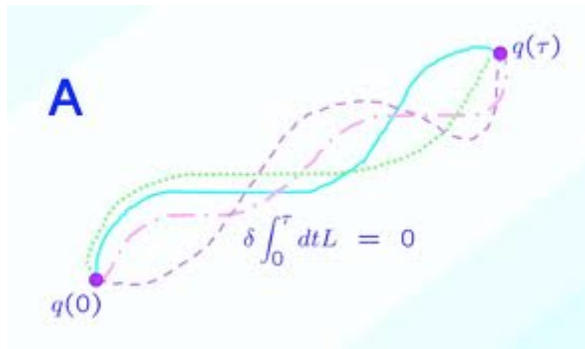
La acción

Definición informal: La acción es la integral del Lagrangiano respecto al tiempo.

$$S = \int L dt$$

Técnicamente hablando este objeto es un funcional que toma como argumentos funciones y devuelve un número, no entraremos en estos detalles matemáticos por el momento.

Si uno quiere estudiar cómo se propaga un sistema desde un punto $x(t_1) = x_1$ hasta un punto $x(t_2) = x_2$ entre un tiempo inicial y final en principio hay infinitas trayectorias posibles. De todas ellas, la que se realiza físicamente es aquella en la que la variación de la acción δS se anula. A este hecho lo llamamos **principio de acción extremal**.



Precisemos esto, tomemos el ejemplo de la [entrada anterior](#) de una partícula en una dimensión donde el Lagrangiano era:

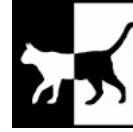
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

Por lo tanto, la acción tomará la forma:

$$S = \int dt L = \int dt \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \right)$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

Ahora queremos estudiar eso que se llama la variación de la acción δS . Para variar la acción lo que hemos de hacer es modificar alguna de las coordenadas dinámicas del sistema, en este caso simple la cosa está clara hemos de variar x . Entonces si variamos la posición una cantidad pequeña δx , tendremos:

$$x \rightarrow x + \delta x$$

La variación puede afectar a cualquier punto de la trayectoria pero evidentemente no a los extremos (que son los puntos de salida y llegada fijados en los que estamos interesados), eso se expresa:

$$\delta x(t_1) = \delta x_1 = 0 \text{ y } \delta x_2 = 0$$

Ahora veamos como varía el potencial y la energía cinética cuando variamos la posición.

Potencial: El potencial de la coordenada variada viene dado por la expresión $V(x + \delta x)$.

Dado que la influencia de la variación la suponemos pequeñas podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor, obteniendo:

$$V(x + \delta x) = V(x) + \delta x \frac{\partial V}{\partial x}$$

Y la energía cinética quedará:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x} + \delta\dot{x})^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \delta\dot{x})^2$$

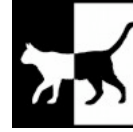
Dado que las variaciones δx se consideran cantidades pequeñas (si estuviéramos hablando de números serían cantidades positivas menores que 1), es claro que su cuadrado es aún más pequeño. Así que vamos a desarrollar el binomio $(\dot{x} + \delta\dot{x})^2$ y vamos a despreciar todos los términos a segundo orden en la variación:

$$(\dot{x} + \delta\dot{x})^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\delta\dot{x} + \delta\dot{x}^2$$

Ahora definamos la acción S' con las cantidades incluyendo la variación:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

Aquí viene un punto importante, lo que nos interesa únicamente es la variación en las coordenadas y no en las velocidades. Si uno mira en el integrando aparece el término $2\dot{x}\delta\dot{x}$. Vamos a expresar cómo se puede reescribir ese término en función de variaciones de las posición, es una simple aplicación de las integrales por partes:

Centrémonos en el término en concreto y luego lo introduciremos en la acción S' :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}\delta\dot{x}dt = \dot{x}\delta x|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta x\ddot{x}dt$$

Recordemos que: $\delta\dot{x} = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta x)$, así que en las relaciones anteriores hemos aplicado la integral por partes de manera usual. El primer término de la derecha se anula porque tenemos que calcular dicho término entre los tiempo inicial y final y las variaciones en esos puntos se anulan.

Introduciendo esto en la acción (por ahorrar en escritura entenderemos ahora que $\int_{t_1}^{t_2} = \int$):

$$S' = \int \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int m\ddot{x}\delta xdt - \int V(x)dt - \int \delta x \frac{\partial V}{\partial x}$$

Aislamos todos los términos que contienen δx :

Así que hemos calculado δS que produce una variación en la coordenada x .

La trayectoria que sigue el sistema es aquella para la cual $\delta S = 0$. Por tanto, en δS el integrando tiene que anularse:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Lo que nos vuelve a dar la ecuación de Newton: $m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

La acción 2

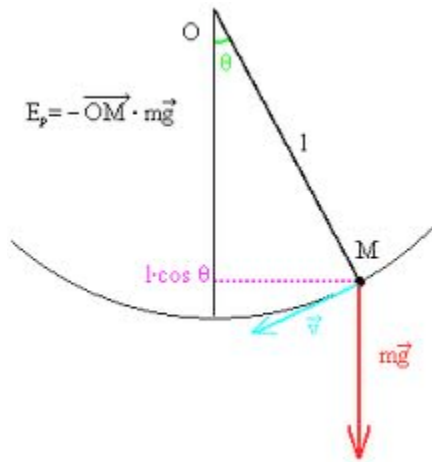


Esta segunda parte dedicada al concepto de acción se va a centrar en demostrar por qué las ecuaciones de Euler-Lagrange nos proporcionan las ecuaciones de movimiento. Todo el secreto está en encontrar la variación que extrema la acción, es decir, $\delta S = 0$

Revisar [La acción 1](#)

Coordenadas Generalizadas

Siempre tenemos la tendencia a expresar las variable dinámicas de un sistema en términos de las coordenadas espaciales (x,y,z). Sin embargo, muchas veces es conveniente elegir otras coordenadas para expresar el movimiento de un sistema. Por ejemplo, en un péndulo como el de la figura:



Si nos empeñamos en usar las coordenadas (x,y) pues hemos de usar relaciones que involucran el coseno o el seno del ángulo que suscribe el péndulo con la vertical.

¿No sería mejor usar directamente el ángulo para describir el movimiento?

Pues bien, en el formalismo Lagrangiano tenemos permitido usar cualquier coordenada que describa los verdaderos grados de libertad de un sistema. A estas coordenadas las denominamos coordenadas generalizadas que representamos por $q_i(t)$ donde el índice i toma valores entre 0 y N (para N grados de libertad discretos).

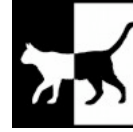
Acción

La acción tomará esta forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

donde representaremos el punto final e inicial de la trayectoria (en el espacio representado por las $\$latexq\$$ que llamaremos **espacio de configuración**) $q(t_1) = q_1$ y $q(t_2) = q_2$.

Calculemos la variación de la acción δS al variar la coordenada generalizada o de configuración δq . Hemos de imponer que las variaciones en los puntos inicial y final son nulas $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$. Para calcular la variación de la acción seguiremos los siguientes pasos:

1.- $\delta S = \delta \int L(q, \dot{q}) dt$ donde \int indicará $\int_{t_1}^{t_2}$.

2.- $\delta S = \delta \int L(q, \dot{q}) dt = \int \delta L(q, \dot{q}) dt$

3.- Calculamos δL , que es análogo a calcular una diferencial:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

4.- Recordemos que la variación conmuta con las derivadas $\delta \dot{q} = \delta \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} \delta q$.

5.- Por tanto podemos escribir:

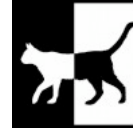
El sumatorio aparece para indicar que hay que hacer eso para todas las coordenadas generalizadas.

6.- El problema en esta ocasión es, como ya vimos, que tenemos variaciones de posiciones y velocidades pero sólo queremos dejar las variaciones en las coordenadas de configuración.

Ejercicio: Demuestra por una integral por partes que se llega a esta expresión (recordando que las variaciones de las coordenadas en los puntos iniciales y finales se anulan):

7.- Ahora imponemos que la acción esté en un extremo $\delta S = 0$ y por lo tanto eso indica que el integrando tiene que ser nulo:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$



donde tenemos una ecuación por cada grado de libertad (N ecuaciones en este caso). Es fácil ver que hemos llegado a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Es por esto, porque sabemos que dichas ecuaciones provienen de imponer que la variación de la acción se anule (**principio de acción extremal**) que podemos aplicarlas directamente a una Lagrangiana dada como hicimos en la entrada de [mecánica Lagrangiana](#).

Con esta breve entrada terminamos la presentación de conceptos y ahora iremos a estudiar la teoría de campos utilizando las herramientas aquí presentadas.

Ejercicio en: La acción 2

Este ejercicio fue propuesto en la entrada: [La acción 2](#)

Partiendo de la expresión:

$$\delta S = \int \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt$$

Demuestra por una integral por partes que se llegamos a este resultado:

$$\delta S = \int \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt$$

recordando que las variaciones de las coordenadas en los puntos iniciales y finales se anulan.

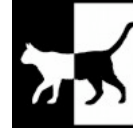
Solución:

La integral por partes nos dice: $\int u dv = uv - \int v du$

Tomemos la parte que involucra a $\delta \dot{q}_i$ de la primera integral:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt$$

Para no escribir tanto aquí entenderemos en lo que sigue: $\int_{t_i}^{t_f} = \int$



Apliquemos la integral por partes en este caso:

$$1.- \quad u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$2.- \quad dv = \frac{d}{dt} \delta q_i dt$$

Por lo tanto:

$$1.- \quad du = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt$$

$$2.- \quad v = \delta q_i$$

Agrupando todo esto tenemos:

El primer término de la derecha es claramente cero porque las variaciones en los puntos inicial y final son nulas: $\delta q_i(t_{i,f}) = 0$

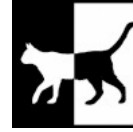
Por lo tanto:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt = - \int_{t_i}^{t_f} \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt$$

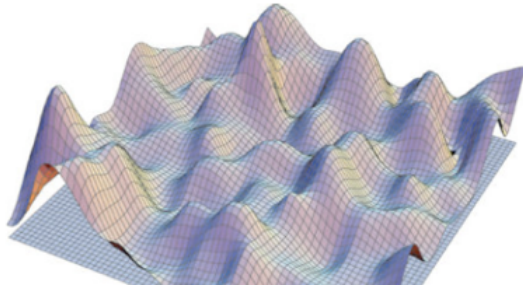
Sustituyendo en la variación de la acción es directo comprobar que obtenemos el resultado que deseábamos.

Teoría clásica de campos

Hasta ahora hemos revisado la formulación Lagrangiana de la mecánica y hemos presentado el objeto central de la misma, la acción. Pero nuestra discusión se ha centrado fundamentalmente en la teoría aplicada a partículas descritas por sus coordenadas espaciotemporales. Ahora vamos a empezar el estudio de los campos desde el punto de vista clásico empleando la maquinaria que hemos desarrollado en las entradas anteriores en el curso de introducción a la teoría cuántica de campos.



Campo



Un campo físico viene representado por una función que toma valores en el espaciotiempo. Es decir, es un objeto extenso que tiene un determinado valor para todo punto del espacio y todo instante de tiempo. Representaremos los campos por:

$$\varphi = \varphi(x, t)$$

Los campos serán nuestro objetos centrales, es decir, nuestras variables dinámicas igual que para las partículas son las coordenadas espaciotemporales. Además iremos viendo distintas clases de campos, escalares, vectoriales, espinoriales. Estas identificaciones se hacen sobre la base de cómo distintos observadores inerciales comparan medidas sobre dichos campos empleando transformaciones de Lorentz. Por el momento prescindiremos de dichas sutilidades y hablaremos en términos generales válidos para todos los tipos de campos. Y para acabar, dado que nos interesamos en un contexto relativista, muchas veces conviene tener una notación unificada para espacio y tiempo, así escribiremos:

$$\varphi = \varphi(x),$$

donde x indica que depende de coordenadas del espaciotiempo (t, x, y, z) .

Densidad Lagrangiana

Análogamente al caso de la Lagrangiana de una partícula para campos definiremos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

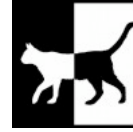
Aquí tenemos que explicar algunos detalles:

1.- La notación ∂_μ indica $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

2.- En el caso de una partícula teníamos que la Lagrangiana dependía de las posiciones (coordenadas de configuración) y sus velocidades (derivadas respecto al tiempo de las coordenadas). Esto es así porque usualmente una partícula viene descrita por una función $x=x(t)$, es decir, sus coordenadas vienen parametrizadas por el tiempo únicamente. En el caso de los campos, vienen determinados por la posición en el espacio y el instante donde medimos el campo, por lo tanto hemos de considerar no sólo derivadas temporales sino también espaciales, es por eso que \mathcal{L} depende de $\partial_\mu \varphi$ y no sólo de $\dot{\varphi}$.



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

3.- Es notorio el cambio de notación de L a \mathcal{L} . Esto es debido a que el objeto descrito por \mathcal{L} es lo que se conoce como **densidad Lagrangiana**. Dado que el campo es un objeto extenso, para conocer el valor de la Lagrangiana L hemos de integrar su densidad en una determinada región del espacio R :

$$L = \int_R \mathcal{L} d^3x$$

Atención: Generalmente se comete un abuso del lenguaje y llamamos Lagrangiana o Lagrangiano tanto a L como a \mathcal{L} . Quedará claro por el contexto si nos referimos a la cantidad integrada o a su densidad.

La acción

Como hemos visto, la acción se define como la integral en el tiempo del Lagrangiano, así que en este caso tendremos:

$$S = \int dt L = \int dt d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$$

donde en la última igualdad hemos tomado ventaja de que el formalismo relativista pone en pie de igualdad a todas las coordenadas espaciotemporales. Este es una de las grandes ventajas de este formalismo ya que, como veremos, esto nos permite estar seguros de que todo lo que hacemos con este objeto verifica las leyes de la relatividad especial, es decir, es invariante Lorentz.

Un interludio sobre el Hamiltoniano

Pronto veremos como es muy útil pasar a la formulación Hamiltoniana a partir de la Lagrangiana. Además de que el punto de partida para la cuantización suele ser el Hamiltoniano.

Para partículas:

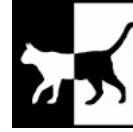
En las ecuaciones de Euler-Lagrange y en las variaciones del Lagrangiano nos encontramos con este tipo de expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

A esta agrupación le ponemos el nombre de momento asociado a la coordenada q_i y lo representamos por P_i . Así pues:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Entonces, uno puede pasar de un Lagrangiano a su Hamiltoniano:

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, p)$$

A esta expresión se la denomina **transformación de Legendre**. No vamos a explicar aquí las sutilezas que esconde este procedimiento, sólo vamos a comentar que el Hamiltoniano es una función de coordenadas y momentos, no de velocidades. Y coordenadas y momentos, a ojos del Hamiltoniano son variables independientes, al igual que lo eran las coordenadas y sus velocidades a los ojos de Lagrangiano.

Para campos:

Podemos actuar de forma análoga para campos, definiendo el momento asociado al campo, $\pi(x)$ como:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi})}$$

Por lo tanto, la densidad Hamiltoniana será:

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}$$

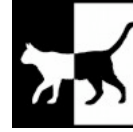
Y el Hamiltoniano vendrá dado por la integral en el espacio de su densidad: $H = \int d^3x \mathcal{H}$.

Ecuaciones del movimiento de un campo

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de un campo aplicamos el principio de acción extremal $\delta S = 0$. Y encontramos que las ecuaciones que deben de ser satisfechas son:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

Ejercicio:



Demostrar aplicando el principio de acción extremal que las ecuaciones de movimiento de un campo con densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ vienen dadas por:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$

Ayuda: El procedimiento es análogo al caso de una partículas con sutilidades a la hora de hacer las derivadas y manejar los índices.

Ejercicio:

Encontrar las ecuaciones de movimiento y el Hamiltoniano (densidad) para los siguientes casos:

a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi^2)$

b) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial_t\varphi)^2 - (\partial_x\varphi)^2) + \cos\varphi$

Simetrías y Cantidades Conservadas: El Teorema Nöther

Continuamos con el curso de [Introducción a la teoría cuántica de campos](#). En esta ocasión nos preocuparemos de una cuestión importante, la relación entre simetrías y cantidades conservadas.

Esta relación se basa en el teorema Nöther (escrito muchas veces como Noether, y que su pronunciación aproximada no es “Neder” sino “Nuúeter” 😊). Vamos a presentar este teorema en esta entrada a través de un ejemplo muy interesante. Posteriormente completaremos la discusión con una breve entrada del teorema en forma general.

Pero por favor, no dejéis de leer sobre [Emmy Nöther](#) una matemática estupenda en una época donde las mujeres no tenían cabida en la universidad y mucho menos en una carrera como la de Matemática. Además que Emmy era originaria de [Erlangen](#), ciudad a la que Cuentos Cuánticos está ciertamente unido.

Simetrías

Seremos muy breves en esta sección definiendo lo que entendemos por simetrías ya que luego veremos el concepto con todo su esplendor matemático.

Simetría: Una simetría es un cambio en los objetos físicos de una teoría que dejan invariantes las ecuaciones del movimiento. (Siendo precisos lo que ha de permanecer invariante es la acción



o los paréntesis de Poisson que se traduce en invariancia de las ecuaciones del movimiento, a la inversa no tiene por qué cumplirse).

Las simetrías se catalogan en dos tipos:

Simetrías espaciotemporales o externas: Son transformaciones que involucran las coordenadas del espaciotiempo. Los ejemplos son las traslaciones espaciales, las rotaciones y los cambios del origen de tiempos (traslaciones temporales).

Simetrías internas: Son transformaciones en los campos que no involucran las coordenadas espaciotemporales. Son cambios en características intrínsecas a los campos.

El teorema Nöther

Cada simetría de la acción lleva asociada una cantidad conservada.

Desde el punto de vista matemático una simetría es una variación de los campos y por tanto del Lagrangiano que determina la teoría que dejan invariantes las ecuaciones del movimiento (la acción o los paréntesis de Poisson).

Un ejemplo antes de la situación general

Supongamos que tenemos un campo φ que depende de las coordenadas espaciotemporales x^μ . Nuestra Lagrangiana (densidad Lagrangiana) como es usual dependerá del campo y sus primeras derivadas: $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$

Ahora efectuemos un desplazamiento pequeño y **arbitrario** de las coordenadas espaciotemporales a^μ :

$$x^\nu \rightarrow x^\nu + a^\mu$$

Esto induce una variación en el campo:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(a) \rightarrow \varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi$$

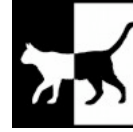
En general un campo sometido a una variación pequeña tiene la expresión:

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$$

Comparando ambas expresiones tenemos:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$\delta\varphi = a^\mu \partial_\mu \varphi$$

En general, cuando sometemos el Lagrangiano a una variación obtenemos:

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right)$$

Entonces podemos escribir:

Teniendo en cuenta que $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu (\delta\varphi)$:

De esta forma podemos entender esta expresión como una derivada total:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right)$$

Ahora introducimos $\delta\varphi = a^\mu \partial_\mu \varphi = a^\nu \partial_\nu \varphi$, donde hemos empleado que tenemos índices mudos para renombrarlos:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right) a^\nu$$

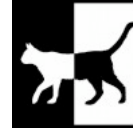
El parámetro de desplazamiento espaciotemporal a^ν es constante y por lo tanto sale de la derivada.

Por otro lado uno podría haber escrito la variación de la Lagrangiana directamente de la variación de las coordenadas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L} a^\mu$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

Esto implica que la variación de la Lagrangiana es:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} a^\mu = \delta_\nu^\mu \partial_\mu \mathcal{L} a^\nu$$

Las dos variaciones tienen que ser iguales:

Uniendo todos los términos en un único término obtenemos:

Dado que la variación en las coordenadas es **arbitraria** en esta expresión lo único que puede anularse es:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_n^\mu u \mathcal{L} \right) = 0$$

A este bicho que es muy importante le asignamos un símbolo:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_n^\mu u \mathcal{L}$$

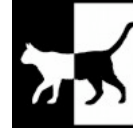
Y recibe el nombre de **tensor energía-momento**. Este objeto, como veremos, contiene la información de la energía contenida en el campo y de su momento.

Dado que su derivada se anula $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ vemos que es una cantidad conservada (no hay variaciones con las derivadas, es decir, ni espacial ni temporalmente).

Veamos una de las componentes del tensor energía momento la $(0, 0)$:

$$T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L}$$

Esto señores es la densidad Hamiltoniana, y de ahí vemos que esa componente es la que contiene la información sobre la energía del campo:



$$T_0^0 = \mathcal{H}$$

Además, si calculamos la derivada temporal $\partial_0 T_0^0 = 0$, es decir, la energía total del sistema se conserva en el tiempo.

Si estudiamos las componentes T_i^0 , donde $i=1,2,3$ identifica las componentes espaciales:

$P^i = \int d^3x T_i^0$ nos da el momento del campo y también es una cantidad conservada.

Teorema Nöther: Corrientes y Cargas conservadas

En la entrada anterior del curso de [Introducción a la Teoría Cuántica de Campos](#) presentamos el teorema Nöther a través de un ejemplo. En esta ocasión queremos dar una versión más general del mismo donde introduzcamos el concepto de corriente y carga conservada.

Corriente conservada

Tenemos un campo φ y lo sometemos a una variación considerada pequeña:

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$$

Esto conlleva una variación en la Lagrangiana del sistema:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$

Si la transformación que estamos realizando es una simetría del sistema la variación del Lagrangiano es nula, o lo que es lo mismo, el Lagrangiano no cambia su forma:

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

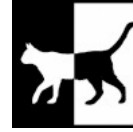
Recordemos que la Lagrangiana es una función del campo y sus derivadas: $\varphi, \partial_\mu\varphi$. Por lo tanto su variación se escribe:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi)$$

También sabemos que se han de cumplir las ecuaciones de movimiento, lo que implica que se han de satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange, por lo que:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right)$$

Sustituyendo esto en la expresión de la variación de la Lagrangiana nos queda:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \partial_\mu (\delta \varphi)$$

Pero notemos que $\partial_\mu (AB) = (\partial_\mu A)B + A(\partial_\mu B)$. Así pues, llamando $A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}$ y $B = \delta \varphi$ la expresión anterior es simplemente:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right)$$

Dado que $\delta \mathcal{L} = 0$ tenemos que:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) = 0$$

Dado que si la derivada de algo es nula ese algo es una constante, si llamamos:

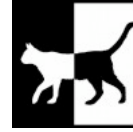
$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi$$

y la llamamos **corriente conservada**, tenemos la condición:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Esta corriente representará el flujo de una magnitud física y la iremos particularizando en cada caso en las entradas siguientes. La anterior ecuación es una ley de conservación.

Nota: Aquí lo único que queremos es poner de manifiesto la existencia de un objeto que denominamos corriente conservada y que verifica una ecuación específica. Luego particularizaremos a distintos casos y veremos por ejemplo en el caso electromagnético que esto involucra la ley de conservación de la carga y la corriente eléctrica.



Características del teorema de Nöther

1.- El teorema Nöther se puede formular del siguiente modo:

Para toda simetría continua del Lagrangiano existe una corriente conservada J^μ

2.- De una corriente conservada podemos obtener una **carga conservada** que se calcula como la integral espacial de la componente 0 de la corriente conservada:

$$Q = \int d^3x J^0$$

Parte Cuántica

Campo escalar

Campo Escalar: La ecuación de Klein-Gordon

Vamos a comenzar nuestro estudio de los campos cuánticos. En esta entrada vamos a introducir la **ecuación de Klein-Gordon**. La derivación de la misma la haremos de la forma más simple posible dejando para más adelante una derivación basada en un **principio de acción**.

Ecuación de Schrödinger y operadores cuánticos

Ya hemos hablado de la ecuación de Schrödinger en varias entradas, para una derivación de la misma ver la entrada: [Mecánica Cuántica, una introducción absurda II: Postulados](#).

La ecuación de Schrödinger es:

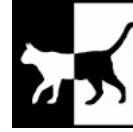
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

Esta ecuación se puede derivar del siguiente modo:

1.- Partimos de la relación clásica de la energía:



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

2.- Utilizamos la correspondencia entre cantidades clásica y operadores cuánticos:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{v} = -i\hbar \nabla$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

Recordemos que
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\hat{x} = x$$

La ecuación de Schrödinger es de primer orden en el tiempo y de segundo orden en las derivadas espaciales. Esto supone un problema para afrontar un estudio relativista donde las coordenadas espaciales y temporales están en pie de igualdad.

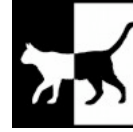
Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que buscar una ecuación que trate igual las coordenadas temporales y espaciales, es decir, que aparezcan derivadas del mismo orden para tiempo y espacio. Esto nos asegura que la ecuación pueda ser consistente con los requerimientos de la relatividad especial. Para ello partimos de la relación relativista entre la masa, la energía y el momento:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Empleando las relaciones anteriores:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4$$



Esta ecuación ha de aplicarse sobre un campo que dependerá de las coordenadas espaciales y el tiempo:

$$\phi = \phi(\vec{x}, t)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi + m^2 c^4 \phi$$

Tomando $\hbar = c = 1$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0$$

Recordemos que: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Así que en este caso tenemos la agrupación:

A esta agrupación la denotaremos: $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$

Esta agrupación es evidentemente invariante Lorentz, así que estamos seguros de que todos los observadores inerciales coinciden en la forma de la misma:

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

Esta ecuación es la **ecuación de Klein-Gordon**.

En las próximas entradas la analizaremos entrando en sus características y cómo nos aboca a una interpretación de $\phi(\vec{x}, t)$ como un campo y no como la interpretación de una función de onda de una partícula.

El problema de Klein-Gordon



En la entrada, [Campo Escalar: La ecuación de Klein-Gordon](#) hemos introducido la ecuación más básica para un campo relativista. En el contexto empleado estamos intentando describir una partícula de espín nulo bajo las leyes de la relatividad especial.

En esta entrada vamos a dar un argumento simple por el que esta interpretación no se sostiene. Posteriormente estudiaremos esto con más detalle y mostraremos como el paso a una teoría de campos soluciona estos problemas.

La ecuación de Klein-Gordon

Esta es una ecuación que se aplica para ver como evoluciona cuánticamente una partícula escalar, de espín nulo, de forma relativista.

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

Expresada en términos de derivadas la ecuación reza así:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

que describe una partícula libre relativista en el ámbito cuántico.

Solución a la ecuación de Klein-Gordon

Esta ecuación se soluciona fácilmente con una función de forma de onda plana:

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{-ip \cdot x}$$

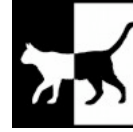
donde $p = (E, \vec{p})$ y $x = (t, \vec{x})$. Por lo tanto el producto es

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

Ahora calculemos las derivadas (nos centramos en una única dimensión espacial por simplicidad):

$$1.- \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(Et - px)} = -iE e^{-i(Et - px)} = -iE\phi$$

$$2.- \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(Et - px)} = ip e^{-i(Et - px)} = ip\phi$$



Reagrupando para calcular $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -E^2 \phi + p^2 \phi$

Introduciéndolo en la ecuación de Klein-Gordon:

$$(E^2 - p^2)\phi = m^2 \phi$$

(notemos que hemos efectuado un cambio de signo global)

Esto implica que ϕ satisface:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

De donde obtenemos:

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Es decir, que tenemos soluciones de la ecuación que pueden tener energías negativas. Pero esto es “inaceptable”. Una partícula no puede tener energías negativas.

Este es el problema básico de la ecuación de Klein-Gordon, la presencia de estados de energía negativas.

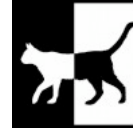
Como veremos próximamente no tenemos únicamente este problema, también tenemos la aparición de que podemos tener probabilidades negativas (lo cual es más preocupante que lo de las energías). Esto se puede solucionar reinterpretando la situación. Se verá que la raíz del problema es la presencia de las derivadas de segundo orden.

Probabilidades negativas

En esta entrada seguimos con el curso de [Introducción a la Teoría Cuántica de Campos](#) y pretendemos mostrar el verdadero [problema asociado a la ecuación de Klein-Gordon](#) cuando la consideramos una ecuación que describe cómo se comporta una partícula relativista.

El verdadero problema de la ecuación de Klein-Gordon aplicada a una única partícula es que nos dice que hay estados donde la probabilidad de encontrar dicha partícula en una región del espacio puede ser negativa.

Nos centraremos en una partícula moviéndose en una dimensión por simplicidad.



Corriente de Probabilidad

Como es estándar tomaremos la **corriente de probabilidad** calculada con un campo escalar ϕ que tomaremos complejo y tomando $\hbar = 1$:

$$J = -i\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x}$$

Calculemos la derivada espacial de la corriente de probabilidad:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i\phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2}$$

Empleando la ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \phi$$

Recordemos que si una función compleja es solución a una ecuación, su compleja conjugada también es solución:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = m^2 \phi^*$$

Sustituyendo la segunda derivada espacial en la corriente por la ecuación de Klein-Gordon:

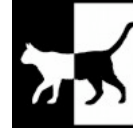
Esto implica que:

Ahora empleando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.
Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

Esta ecuación nos da la conservación de la probabilidad y nos dice que la variación en el tiempo de la densidad de probabilidad ρ de encontrar una partícula en una región se compensa con el gradiente de la corriente de probabilidad, es decir, cómo fluye dicha probabilidad en esta región.

Por lo tanto identificamos:

Y por tanto la densidad de probabilidad es:

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)$$

Recordemos que en mecánica cuántica no relativista la densidad de probabilidad era:

$$\rho_{NR} = \psi^* \psi = |\psi|^2$$

Y esta cantidad es definida positiva (nótese que es un módulo al cuadrado).

El problema es que en el caso de Klein-Gordon la densidad de probabilidad contiene derivadas temporales ya que esta ecuación es de segundo orden en las derivadas temporales. Y esta es la razón por la que podemos tener probabilidades negativas.

Probabilidades Negativas

Como se vio en las entradas anteriores del curso la solución de tipo partícula libre viene dada por la onda plana:

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{-ip \cdot x} = e^{-i(Et - px)}$$

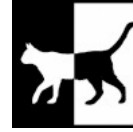
Ahora calculemos las derivadas temporales de esta solución y de su compleja conjugada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -iE e^{-i(Et - px)} = -iE \phi$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} = iE e^{i(Et - px)} = -iE \phi^*$$



Cuentos Cuánticos



Un nuevo blog para la divulgación de la física teórica actual.

Curso: Introducción a la Teoría cuántica de campos

El producto $\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} = e^{i(Et-px)}(-iE)e^{-i(Et-px)} = -iE$

Por lo tanto sustituyendo en la expresión de ρ

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) = i(-iE - iE) = 2E$$

Aparentemente esto es una solución positiva al problema... Pero recordemos que estamos en relatividad especial y como vimos en la entrada anterior:

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Es decir, que la energía puede ser negativa, por lo tanto la densidad de probabilidad también puede ser negativa. Con esto se unifican ambos problemas y hacen que esta ecuación no se pueda interpretar como una ecuación para una única partícula relativista. Veremos que esto se resuelve pasando a una interpretación de campos en vez de partículas.